# משפט דיני

תהיינה רציפות על כך ש לכל . אזי במ"ש על

## דוגמאות

1. אזי כל התנאים מתקיימים חוף מש אינו קומפקטי אבל ההתכנסות אינה במ"ש.
2. אזי כל התנאים של המשפט מתקיימים חוף מרציפות של f ב, אבל ההתכנסות אינה במ"ש על

# שאלה

תהיינה גזירות ב ו במ"ש על , האם אפשר להסיק ש במ"ש?

## תשובה

לא! לדוגמה:

1. במ"ש על שכן . אבל  
   אם אזי , ולכן עבור n מספיק גדול, יהיה מספר זוגי ולכן .
2. , , במ"ש על ואילו לא מתכנסת בשום נקודה.

# משפט

תהיינה פונקציות גזירות על כך ש מתכנסת עבור (נקודה אחת). אם במ"ש על אזי מתכנסת במ"ש לפונקציה גזירה f המוגדרת על ו עבור

## למה

אם במ"ש על ולכל n, , אזי קיים ו

### הוכחה

יהי . קיים N כך ש לכל ולכל . לכן . לכן הינה סדרת קושי. נסמן את גבולה בa. יהי . קח N כך שעבור וגם עבור . אזי

## הוכחה(למשפט)

יהי . קיים N כך שאם אזי:

1. וגם
2. , .

ניישם את משפט לגרנז' לפונקציה כדי לקבל

ברור ש. לכן, ע"פ (1) ו(3) עבור לכל . ז"א מתכנסת במ"ש על . נסמן את גבולה בf.  
 במ"ש על . עכשיו נקבע ונגדיר

1. , .

אזי . לפי אי השוויון הראשון ב(3) אם . ומכאן מתכנסת במ"ש על . כיוון ש נובע מ(4) ש במ"ש על

עכשיו ניישם את הלמה כדי לקבל את הטענה האחרונה של המשפט.

טורי חזקות

כיוון ש ניתן להסתכל על הטור בתור , לכן נדבר על טורים מהצורה

# משפט

אם קיים כך ש אזי מתכנס בהחלט לכל x כך ש

## דוגמה

הטור מתכנס עבור (ז"א ) ולכן הטור מתכנס. עבור

## הוכחה

כיוון ש קיים M כך ש לכל n. לכן אם

## דוגמאות

1. הטור מתכנס אך ורק עבור שכן אם
2. הטור מתכנס לכל שכן לכל
3. מתכנס עבור ומתבדר עבור
4. מתכנס עבור , מתבדר עבור
5. מתכנס עבור , מתבדר עבור

# משפט

יהי טור חזקות. אזי או

1. הטור מתכנס אך ורק עבור

או

1. הטור מתכנס לכל

או

1. קיים כך שהטור מתכנס עבור ומתבדר מחוץ לקטע , ז"א עבור

## הגדרה

קוראים לR רדיוס ההתכנסות של הטור. אם א) מתקיים נשים , אם ב) נשים

## הוכחה

נסמן ונשים ( אם E אינו חסום).

טענה: אם , ואם אזי הטור מתבדר. נניח (המקרים הנשארים פשוטים יותר). נניח ש, אזי קיים כך ש ואז לפי המשפט הקודם. אם לא יכול להיות ש כיוון ש

# נוסחת קושי – הדמר(Hadamard)

אם ,   
אם ,

## הוכחה

נניח ש. אם אזיולכן הטור מתכנס. ואם – **תרגיל**

# משפט

יהי טור חזקות כך ש. אזי לכל הטור מתכנס במ"ש על

## הוכחה

כיוון ש . ניישם מבחן הM ל באשר , כדי לראות שהטור